

# Réseaux et informatique embarquée

## 1. Rappels sur les systèmes à temps discret

Valentin Gies

Université de Toulon (UTLN)

# Plan du cours

- 1 Systemes à temps discret
  - Echantillonnage
  - Blocage
  - Quantification
- 2 Transformée en z
  - Définition et propriétés
  - Transformées usuelles
  - Laplace  $\Rightarrow$  Transformée en z

# Pourquoi le discrétiser le temps ?

## Contrôle analogique :

- Composants analogiques (A.O., dipôles linéaires, transistors...) : **temps continu**.
- Difficilement programmable : **manque de flexibilité**, dimensionné pour une application

## Contrôle numérique :

- Correcteurs à **temps discret** : présence d'une horloge de synchronisation.
- Facilement programmable : **très flexible**, facilement portable.

# Interfaçage discret-continu

## Dans les systèmes réels :

- Pilotage : temps discret
- Système réel : temps continu

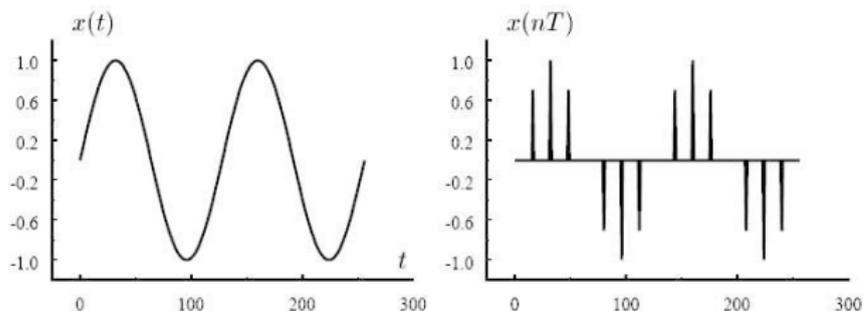
## ⇒ Passage de l'un à l'autre :

- Temps continu ⇒ Temps discret : **Echantillonneur**
- Temps discret ⇒ Temps continu : **Bloqueur**

A chaque passage temps discret ⇒ temps continu :  
**quantification**

# Échantillonnage des signaux

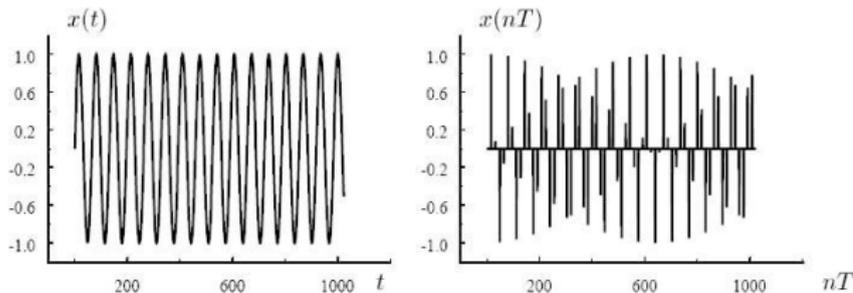
- A un rythme régulier : à chaque période d'horloge  $T$ .



- La valeur échantillonnée est conservée pendant toute la période : **blocage**.
- La valeur analogique bloquée est convertie en valeur numérique.

# Limite fréquentielle à l'échantillonnage des signaux

- Si le signal varie trop rapidement par rapport à période d'horloge  $T$ .



On ne peut pas reconstruire le signal d'origine.

- $\Rightarrow$  étude de l'échantillonnage dans le domaine fréquentiel : formulation de Nyquist (1928) et Shannon(1948).

# Échantillonnage dans le domaine fréquentiel

Opération d'échantillonnage à  $t = 0$ .

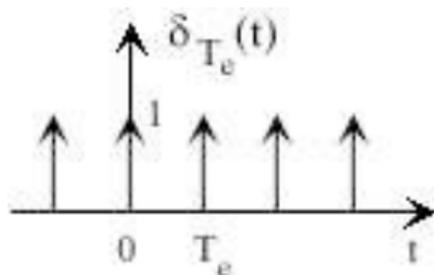
$$x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t)dt$$

Opération d'échantillonnage à  $t = nT_e$ .

$$\begin{aligned}x(nT_e) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t - nT_e)dt \\ &= x(nT_e)\delta(t - nT_e)\end{aligned}$$

# Échantillonnage dans le domaine fréquentiel (2)

Soit un "peigne" de Dirac :  $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_e)$



La série échantillonnée  $y(t)$  d'un signal est obtenue en multipliant le signal  $x(t)$  avec le peigne  $s(t)$  :

$$y(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(nT_e)\delta(t - nT_e) = x(t) \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_e)$$

## Échantillonnage dans le domaine fréquentiel (3)

La transformée de Fourier du signal échantillonné est donc le produit de convolution des TF du signal et du peigne de Dirac :

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega - \nu) S(\nu) d\nu$$

or on sait que **la transformée de Fourier du peigne de Dirac** est un peigne de Dirac dans le domaine fréquentiel

$$S(\nu) = K \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - k\omega_e)$$

On a donc :

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega - \nu) \left[ K \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - k\omega_e) \right] d\nu$$

# Échantillonnage dans le domaine fréquentiel (4)

Or, on remarque que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega - \nu) [\delta(\nu - k\omega_e)] d\nu = X(\omega - k\omega_e)$$

On en déduit donc :

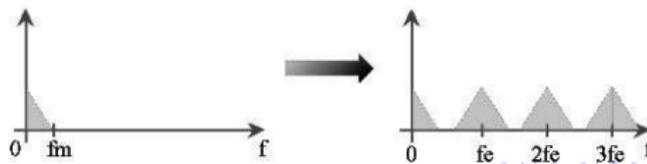
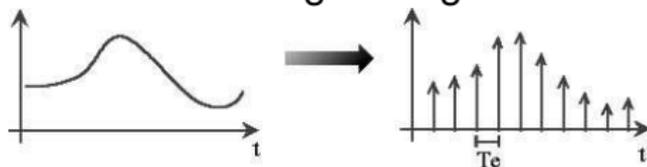
$$Y(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_e)$$

# Échantillonnage dans le domaine fréquentiel (5)

Transformée de Fourier du signal échantillonné :

$$Y(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_e)$$

- La TF du signal échantillonné est la somme des reproductions de la TF du signal original décalées de  $k\omega_e$ .



## Échantillonnage dans le domaine fréquentiel (6)

**Reconstruction du signal d'origine** : La reconstruction du signal d'origine ne peut se faire que si :

- En filtrant la TF du signal échantillonné, on peut retrouver la TF du signal d'origine.

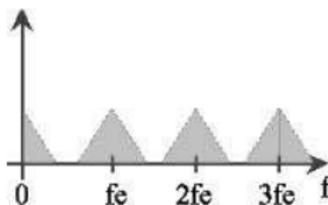


fig – Signal reconstructible

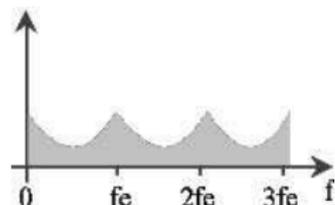


fig – Signal non reconstructible

- Le signal n'est pas reconstructible lorsqu'il y a *repliement de spectre* ou *aliasing*

# Échantillonnage dans le domaine fréquentiel (7)

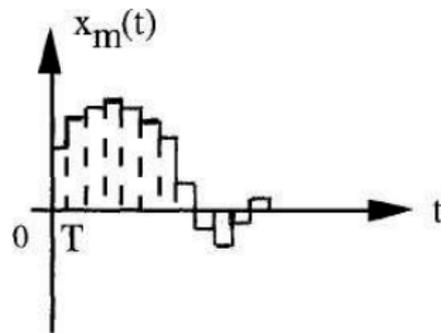
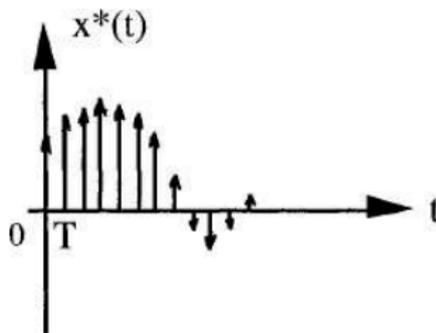
## Reconstruction du signal d'origine : Théorème de Shannon

- **Condition suffisante** à la reconstruction de signaux simples : un signal numérique échantillonné peut être reconstruit si sa transformée de Fourier est nulle en dehors de la bande de fréquence  $]-\frac{\omega_e}{2}, \frac{\omega_e}{2}[$ .
- **Condition nécessaire** à la reconstruction de signaux complexes : un signal numérique échantillonné peut être reconstruit si l'encombrement spectral (bande de fréquence du spectre) du signal original est inférieur à  $\omega_e$ .

# Blocage des signaux

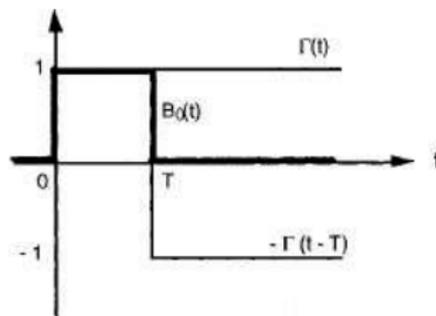
## Utilité d'un bloqueur :

- Temps continu : nécessite une valeur d'entrée en permanence.
- $\Rightarrow$  Ajout d'un bloqueur : maintien la valeur durant une période.



# Blocage des signaux

**Fonction de transfert d'un bloqueur :**

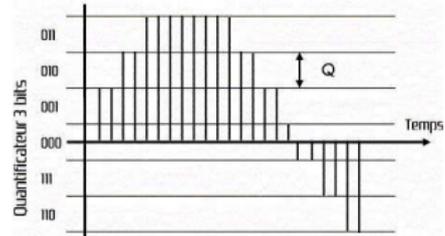
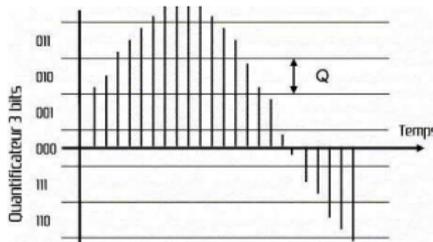


**Transformée de Laplace d'un bloqueur :**

$$B_0(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-Tp} = \frac{1 - e^{-Tp}}{p} \quad (0)$$

# Quantification des signaux

- Représentation numérique de l'information : valeurs quantifiées



- Variance  $E(b^2)$  de l'erreur de quantification  $b$  :

$$E(b^2) = \int_{-q/2}^{q/2} b^2 p(b) db = \frac{1}{q} \int_{-q/2}^{q/2} b^2 db = \frac{q^2}{12}$$

## Définition et propriétés

**Définition** de la transformée en z :

$$S(z) = \mathcal{Z}(s(n)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

**Exemple** : transformée en z d'un échelon unitaire

$$\begin{aligned} U(z) = \mathcal{Z}(u(n)) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \\ &= \frac{1}{1 - z^{-1}} \end{aligned}$$

# Propriétés de la transformée en z

## Propriétés de la transformée en z :

- **Linéarité :**

$$\mathcal{Z}(\alpha f(n) + \beta g(n)) = \alpha \mathcal{Z}(f(n)) + \beta \mathcal{Z}(g(n))$$

- **Décalage temporel :**

$$\mathcal{Z}(f(n - k)) = z^{-k} \mathcal{Z}(f(n))$$

- **Multiplication par une exponentielle :**

$$\mathcal{Z}(a^n f(n)) = F(z/a)$$

# Propriétés (suite)

**Propriétés de la transformée en z (suite) :**

- **Multiplication par la variable d'évolution :**

$$\mathcal{Z}(n^k f(n)) = \left(-z \frac{d}{dz}\right)^k \mathcal{Z}(f(n))$$

$$\mathcal{Z}(nf(n)) = -z \frac{d}{dz} \mathcal{Z}(f(n)) \quad (\text{pour } k = 1)$$

- **Convolution :**

$$\mathcal{Z}(f(n) * g(n)) = \mathcal{Z}(f(n))\mathcal{Z}(g(n))$$

## Propriétés (suite)

**Propriétés de la transformée en z (suite) :**

- **Théorème de la valeur initiale :**

$$x(0) = \lim_{n \rightarrow 0} x(n) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

- **Théorème de la valeur finale :**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)X(z)$$

- **Transformée inverse :**

$$x(n) = \mathcal{Z}^{-1}(X(z)) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

En pratique, on utilise le tableau de correspondance après décomposition en facteurs premiers.

# Tableau des transformées en z usuelles

<b>X(z)</b>	<b>x(n)</b>
1	$\delta(t)$ (Dirac)
$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$u(n)$ (Echelon)
$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$a^n u(n)$
$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$na^n u(n)$
$\frac{1 - z^{-1} \cos \omega_0}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$	$\cos \omega_0 n u(n)$
$\frac{z^{-1} \sin \omega_0}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$	$\sin \omega_0 n u(n)$

# Utilisation des transformées en z usuelles

- Formules de calcul directe des transformées en z : complexe
- Transformée en z inverse : complexe
- Décomposition polynômiale : assez complexe.

La transformée en z n'est pas un outil très commode à manipuler.

$\Rightarrow$  Idée : utiliser la transformée de Laplace puis discrétiser les filtres et correcteurs obtenus.

# Passage Laplace $\Rightarrow$ Transformée en z :

## 3 formulations possibles

**Equivalence** de la dérivée (Euler) :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x_n - x_{n-1}}{T_e} \Rightarrow p \leftrightarrow \frac{1 - z^{-1}}{T_e}$$

**Transformation bilinéaire** :

$$y(n) = y(n-1) + T_e \frac{y'(n) + y'(n+1)}{2} \Rightarrow \frac{Y'(z)}{Y(z)} = \frac{2}{T_e} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

On obtient donc :

$$s \Leftrightarrow \frac{2}{T_e} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad \text{ou} \quad z \Leftrightarrow \frac{1 + \frac{T_e}{2}s}{1 - \frac{T_e}{2}s}$$

# Exemple d'application : approximation d'Euler

**Filtre numérique équivalent** à un filtre passe-bas d'ordre 1 :

$$H(s) = \frac{1}{1 + \tau s}$$

On remplace s par son équivalent en z au sens d'Euler :

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{1 + \frac{\tau}{T_e}(1 - z^{-1})} = \frac{\frac{T_e}{\tau}}{\left(1 + \frac{\tau}{T_e}(1 - z^{-1})\right)} = \frac{\frac{T_e}{\tau}}{\frac{T_e}{\tau} + (1 - z^{-1})} \\ &= \frac{\frac{T_e}{\tau}}{\left(1 + \frac{T_e}{\tau}\right) \left(1 - \frac{z^{-1}}{1 + \frac{T_e}{\tau}}\right)} \simeq \frac{\frac{T_e}{\tau}(1 - \frac{T_e}{\tau})}{\left(1 - z^{-1}(1 - \frac{T_e}{\tau})\right)} \simeq \frac{\frac{T_e}{\tau}}{\left(1 - z^{-1}(1 - \frac{T_e}{\tau})\right)} \end{aligned}$$

## Exemple d'application : approximation d'Euler

Un filtre passe-bas d'ordre 1 peut donc se mettre sous la forme :

$$H(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{\frac{T_e}{\tau}}{\left(1 - z^{-1}\left(1 - \frac{T_e}{\tau}\right)\right)}$$

Soit :

$$S(z) \left(1 - z^{-1}\left(1 - \frac{T_e}{\tau}\right)\right) = E(z) \frac{T_e}{\tau}$$

Ce qui correspond à une implantation discrète de la forme :

$$s(n) = \left(1 - \frac{T_e}{\tau}\right) s(n-1) + \frac{T_e}{\tau} * e(n)$$

# Exemple d'application : transformée bilinéaire

**Filtre numérique équivalent** à un filtre passe-bas d'ordre 1 :

$$H(s) = \frac{1}{1 + \tau s}$$

On remplace s par son équivalent en z au sens de la transformation bilinéaire :

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{1 + \frac{2\tau}{T_e} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}} = \frac{T_e(1 + z^{-1})}{T_e(1 + z^{-1}) + 2\tau(1 - z^{-1})} = \frac{T_e(1 + z^{-1})}{(T_e + 2\tau) + z^{-1}(T_e - 2\tau)} \\ &= \frac{(1 + z^{-1}) \left( \frac{T_e}{T_e + 2\tau} \right)}{1 + z^{-1} \left( \frac{T_e - 2\tau}{T_e + 2\tau} \right)} = \frac{(1 + z^{-1}) \frac{T_e}{2\tau} \left( \frac{1}{1 + \frac{T_e}{2\tau}} \right)}{1 + z^{-1} \left( \frac{\frac{T_e}{2\tau} - 1}{\frac{T_e}{2\tau} + 1} \right)} \end{aligned}$$

# Exemple d'application : transformée bilinéaire

$$H(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{(1+z^{-1})\frac{T_e}{2\tau} \left( \frac{1}{1+\frac{T_e}{2\tau}} \right)}{1+z^{-1} \left( \frac{\frac{T_e}{2\tau}-1}{\frac{T_e}{2\tau}+1} \right)} = \frac{(1+z^{-1})\frac{T_e}{2\tau} \left( 1 - \frac{T_e}{2\tau} \right)}{1-z^{-1} \left( 1 - \frac{T_e}{2\tau} \right)^2}$$
$$\simeq \frac{(1+z^{-1})\frac{T_e}{2\tau}}{1-z^{-1} \left( 1 - \frac{T_e}{\tau} \right)}$$

Soit :

$$S(z) \left( 1 - z^{-1} \left( 1 - \frac{T_e}{\tau} \right) \right) = E(z) (1+z^{-1}) \frac{T_e}{2\tau}$$

Ce qui correspond à une implantation discrète de la forme :

$$s(n) = \left( 1 - \frac{T_e}{\tau} \right) s(n-1) + \frac{T_e}{\tau} * \frac{e(n) + e(n-1)}{2}$$

## Comparaison Euler - transformée bilinéaire

Les implantations obtenues en comparant le transformée bilinéaire et la transformée d'Euler sont très proches.  
Pour un filtre passe-bas du premier ordre par exemple :

- Transformée d'Euler :

$$s(n) = \left(1 - \frac{T_e}{\tau}\right) s(n-1) + \frac{T_e}{\tau} * e(n)$$

- Transformée bilinéaire

$$s(n) = \left(1 - \frac{T_e}{\tau}\right) s(n-1) + \frac{T_e}{\tau} * \frac{e(n) + e(n-1)}{2}$$

La transformée bilinéaire évite un déphasage d'une demi période d'échantillonnage de la sortie du filtre.

## Exemple d'application : correcteur PID

Correcteur PID dans le domaine de Laplace :

$$H(s) = K_p + K_i/s + K_d s = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

Ce qui donne avec l'approximation d'Euler :

$$H(z) = \frac{K_p(1 - z^{-1}) + K_i T_e + \frac{K_d}{T_e}(1 - z^{-1})^2}{1 - z^{-1}}$$

Soit :

$$S(z)(1 - z^{-1}) = E(z) \left( (K_p + K_i T_e + \frac{K_d}{T_e}) + (-K_p - 2\frac{K_d}{T_e})z^{-1} + \frac{K_d}{T_e}z^{-2} \right)$$

$$S_n = S_{n-1} + E_n(K_p + K_i T_e + \frac{K_d}{T_e}) + E_{n-1}(-K_p - 2\frac{K_d}{T_e}) + E_{n-2}(\frac{K_d}{T_e})$$

# Un dernier exemple d'application : filtre passe-haut

**Filtre numérique équivalent** à un filtre passe-haut d'ordre 1 en utilisant l'équivalence d'Euler :

$$H(s) = \frac{\tau s}{1 + \tau s}$$

On remplace s par son équivalent en z au sens d'Euler :

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{\frac{\tau}{T_e}(1 - z^{-1})}{1 + \frac{\tau}{T_e}(1 - z^{-1})} = \frac{(1 - z^{-1})}{\frac{T_e}{\tau} + (1 - z^{-1})} \\ &= \frac{(1 - z^{-1})}{\left(1 + \frac{T_e}{\tau}\right) \left(1 - \frac{z^{-1}}{1 + \frac{T_e}{\tau}}\right)} \simeq \frac{(1 - z^{-1})(1 - \frac{T_e}{\tau})}{\left(1 - z^{-1}(1 - \frac{T_e}{\tau})\right)} \end{aligned}$$

## Un dernier exemple d'application : filtre passe-haut

$$H(z) = \frac{(1 - z^{-1})(1 - \frac{T_e}{\tau})}{\left(1 - z^{-1}\left(1 - \frac{T_e}{\tau}\right)\right)} = \frac{S(z)}{E(z)}$$

On en déduit l'implantation à temps discret :

$$S_n = S_{n-1}\left(1 - \frac{T_e}{\tau}\right) + E_n\left(1 - \frac{T_e}{\tau}\right) - E_{n-1}\left(1 - \frac{T_e}{\tau}\right)$$

## Intérêt de la transformation bilinéaire :

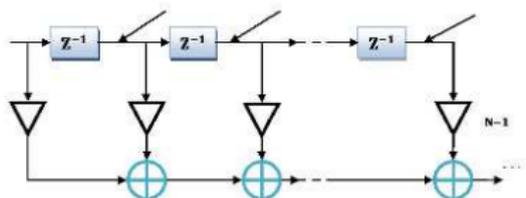
- Permet d'étudier les correcteurs dans le domaine de Laplace.
- Transformation simple : valable pour les pulsation éloignées de  $\frac{\pi}{T}$  (cf Shannon...)

On se **limitera dans ce cours** à l'introduction de cette méthode de détermination des correcteurs. En pratique, il existe d'autres méthodes de synthèses de filtres directes, sans avoir recours à la transformée de Laplace :

- Filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF) : très simples et inconditionnellement stables.
- Filtres à réponse impulsionnelle infinie (RII) : un peu plus complexe, et avec un risque d'instabilité

# Contraintes d'implantation des filtres numériques :

**Les produits scalaires doivent être implanté de manière efficace :**



- L'opération de base est la MAC : Multiplication et Accumulation
- Le décalage des données dans un registre à chaque période doit être également optimal

Les produits scalaires seront implanté efficacement dans un type de processeur particulier disposant d'un MAC en une opération et d'un décaleur à barillet : le **DSP** (*Digital Signal Processor*)

# Questions ?

- Questions
- Contact : [vgies@hotmail.com](mailto:vgies@hotmail.com)